Subject: المحاضرة السادسة / محاضرة ٧ صباحا

$$f(x) = J_f(x) + \varphi(x)$$

دالة القفز — مستمرة ومحدودة التغير

البرهان

حسب الفرض لدينا $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$; f_1, f_2 دالتان متزايدتان ومحدودتان على $[a,b]$

وحسب المبرهنة السابقة يكون لدينا $\varphi_1(x) = f_1(x) - J_{f_1}(x)$; $\forall x \in [a,b]$ دالة القفز المرافقة لـ f_1

$\varphi_2(x) = f_2(x) - J_{f_2}(x)$; φ_1, φ_2 دالتان مستمرتان ومتزايدتان على $[a,b]$

$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ومحدودة التغير على $[a,b]$ ومن جهة أخرى

لدينا $\varphi(x) = [f_1(x) - J_{f_1}(x)] - [f_2(x) - J_{f_2}(x)]$

بإعادة ترتيب الحدود

$$= [f_1(x) - f_2(x)] - [J_{f_1}(x) - J_{f_2}(x)]$$

$$= f(x) - J_f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = J_f(x) + \varphi(x)$$

p.s لتكن $f(x)$ دالة م. ت على $[a,b]$ بحيث

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

كما أنه مجموعة نقاط الانقطاع لدالة محدودة التغير تكون على الأكثر قابلة للعد

ولو فرضنا أن النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $a < x_k < b$

هي كل نقاط الانقطاع على الأقل لإحدى الدالتين $f_1(x)$ أو $f_2(x)$

فيكون لدينا

$$J_{f_1}(a) = J_{f_2}(a) = 0$$

ومن أجل $a < x \leq b$

$$J_{f_1}(x) = [f_1(a+0) - f_1(a)] + \sum_{x_k < x} [f_1(x_k + 0) - f_1(x_k - 0)] +$$

$$[f_1(x) - f_1(x-0)]$$

محاضرة ٥ صباحا

Subject:

$$J_{f_2}(x) = [f_2(a+0) - f_2(a)] + \sum_{x_k < x} [f_2(x_k+0) - f_2(x_k)]$$

$$+ [f_2(x) - f_2(x-0)]$$

$$J_f(x) = J_{f_1}(x) - J_{f_2}(x)$$

$$\Rightarrow J(a) = 0$$

$$J(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k+0) - f(x_k)]$$

$$+ [f(x) - f(x-0)]$$

$J(x)$ هي دالة القفز المرافقة للدالة $f(x)$ محدودة التغير

$$J_f(x) = J_{f_1}(x) - J_{f_2}(x)$$

← دالة القفز لـ $f(x)$

P.S من أجل الدوال المستمرة نحصل على التغير الكلي لها بأخذ تجزئة مثل $[a,b]$ نجد:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim V(f, T)$$

$\lambda(T) \to 0$

* الدوال المستمرة مطلقاً

تمرين: لتكن الدالة $f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$; $x \in [0,1]$

نلاحظ أن الدالة المعطاة هي دالة قابلة للاشتقاق

$$f'(x) = 2x + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 > 0$$

$$|f'(x)| \leq 3 \; ; \; \forall x \in [0,1]$$

⇐ الدالة المعطاة هي دالة متزايدة ومحدودة

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = |f(1) - f(0)| = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

محاضرة 3

Subject:

تمرين

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\ ;\ x\in[2,+\infty[$$

نلاحظ هنا الدالة متناقصة على الفترة المحدودة $[2,A]$; $\forall A>2$

اذاً الدالة محدودة م. ت على المجال

$$\overset{A}{\underset{2}{V}}(f)=|f(A)-f(2)|$$

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}}(f)=\sup_{A>2}|f(A)-f(2)|=\lim_{A\to\infty}\left|\frac{1}{(A+1)^2}-\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9}$$

تمرين: اذا كانت الدالتان $g(x)$, $f(x)$ دالتان م. ت على $[a,b]$ فتكون الدوال الآتية

$f(x)$, $g(x)$; $x\in[a,b]$

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

تكون محدودة التغير على هذا المجال

الحل: نلاحظ أن $M(x)+m(x)=f(x)+g(x)$ ... (1)

$M(x)-m(x)=|f(x)-g(x)|$ ... (2)

نجمع (1) مع (2) $M(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$ م. ت على المجال $[a,b]$.

$m(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$ م. ت على المجال $[a,b]$.

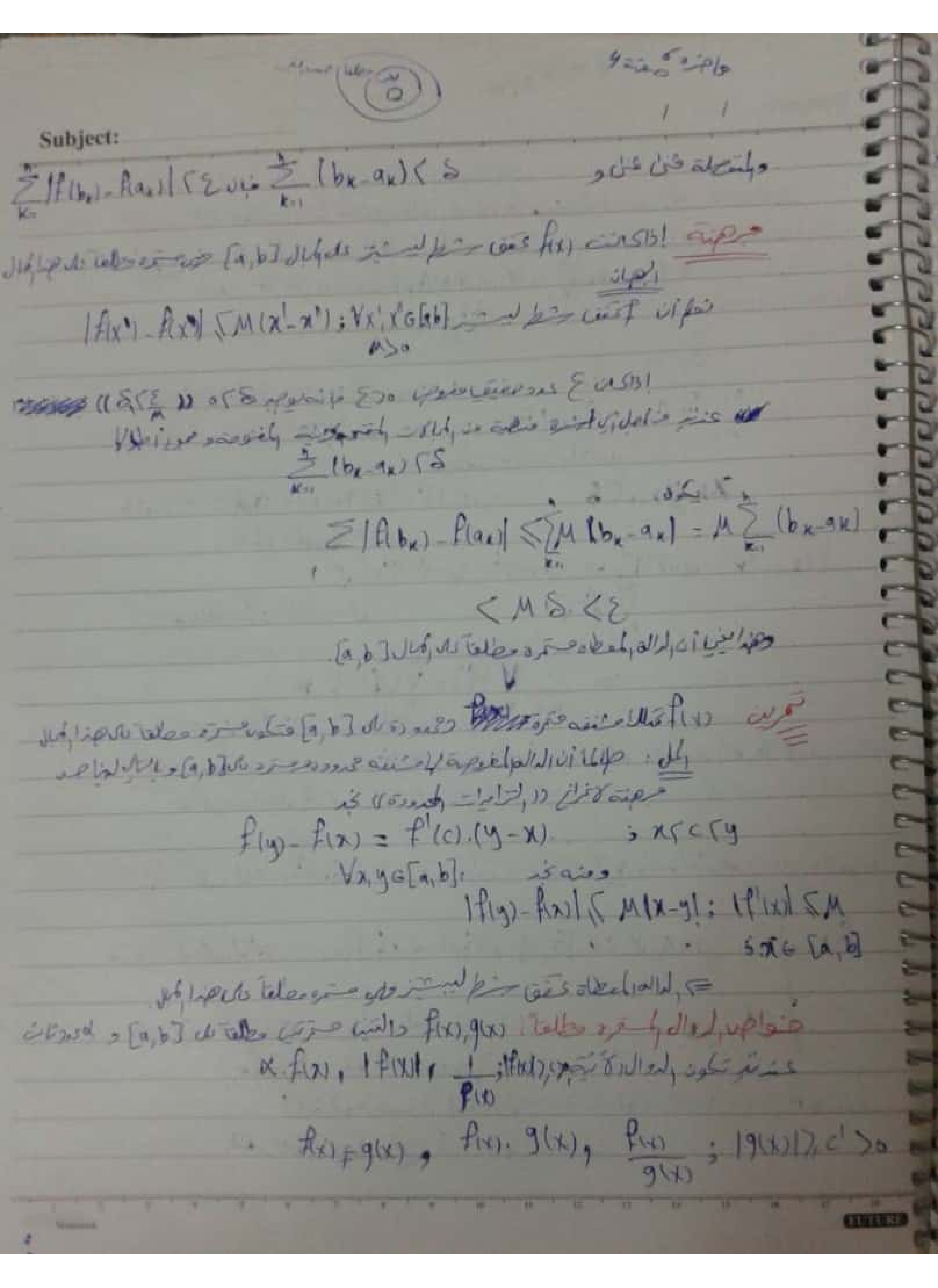
وهو المطلوب

* سندرس في هذه الفقرة صنف جزئي يسمى صنف الدوال المستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$

تعريف (1)

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومحدودة على المجال $[a,b]$ نقول أن هذه الدالة مستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$

بحيث أنه أياً كانت أسرة المجالات الجزئية المفتوحة والمنتهية $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$



Subject:

والمتطابقة فإن شئ و $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$ متى $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$

مبرهنة: إذا كانت $f(x)$ تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ فهي مستمرة مطلقاً على هذا المجال.

البرهان: نفرض أن f تحقق شرط ليبشتز $|f(x'')-f(x')|\le M(x''-x')\ ;\ \forall x',x''\in[a,b]$, $M>0$

إذا كان ϵ عدد حقيقي موجب فإنه يوجد $\delta>0$ نختار δ بحيث $\delta<\frac{\epsilon}{M}$

عندئذٍ مهما كانت المجالات الجزئية منتهية من المجالات المنفصلة بحيث

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

يكون:

$$\sum|f(b_k)-f(a_k)|\le\sum_{k=1}^{n}M(b_k-a_k)=M\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$$

$$<M\delta<\epsilon$$

ومنه ينتج أن الدالة المعطاة مستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$.

تمرين: $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ومشتقها محدود على $[a,b]$ فتكون مستمرة مطلقاً على هذا المجال.

الحل: طالما أن الدالة المفروضة لها مشتقة محدودة ومستمرة على $[a,b]$ وبالتالي حسب مبرهنة لاغرانج (التزايدات المحدودة) نجد

$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\quad ;\ x<c<y$$

$\forall x,y\in[a,b]$ ومنه نجد

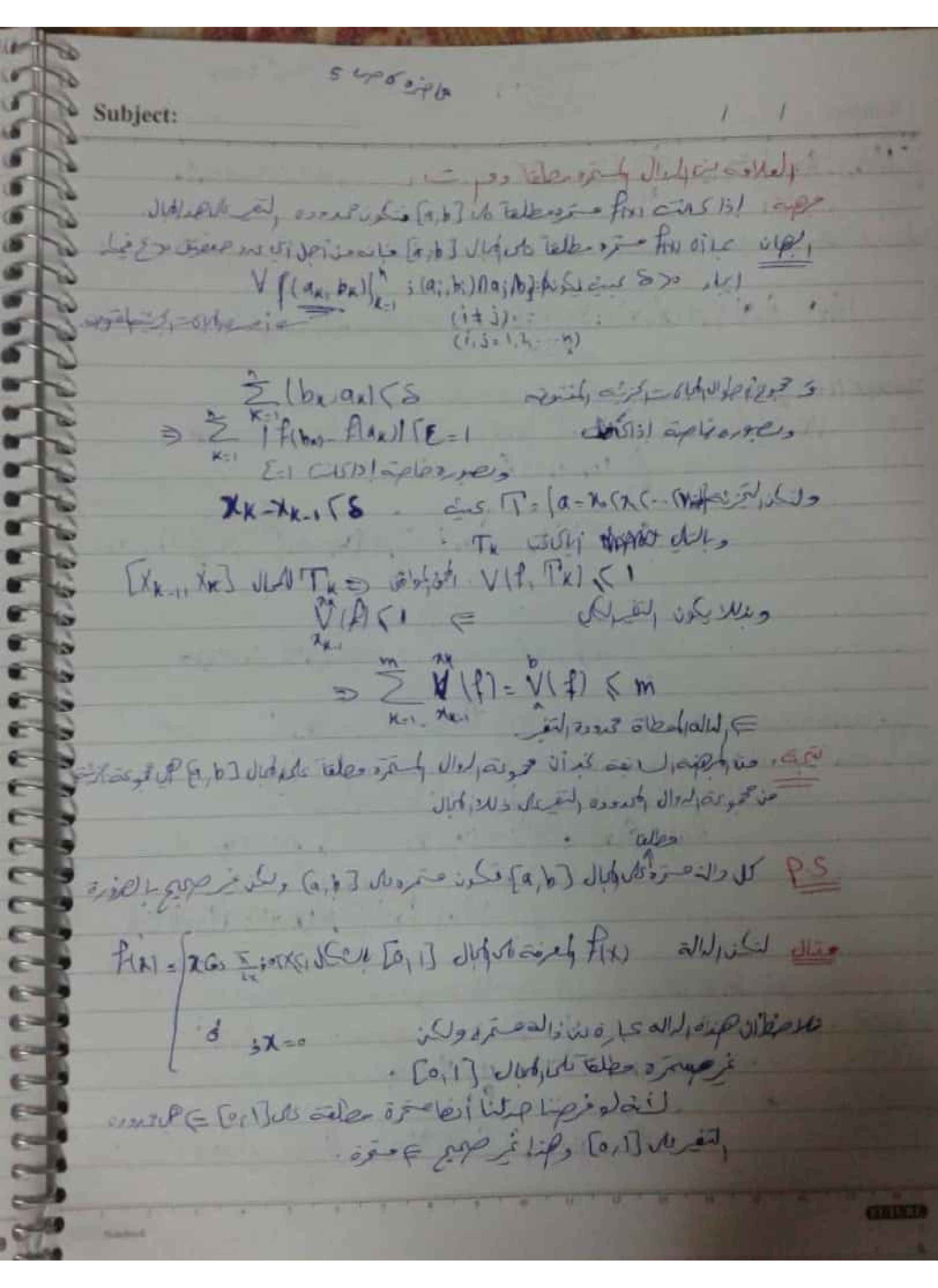
$$|f(y)-f(x)|\le M|x-y| : |f'(x)|\le M\ ;\ x\in[a,b]$$

$\Leftarrow$ الدالة المعطاة تحقق شرط ليبشتز فهي مستمرة مطلقاً على هذا المجال.

خواص الدوال المستمرة مطلقاً: $f(x),g(x)$ دالتين مستمرتين مطلقاً على $[a,b]$ و α عدد ثابت

عندئذٍ تكون الدوال التالية مستمرة: $\alpha f(x)$, $|f(x)|$, $\frac{1}{f(x)}$; $|f(x)|\ge c>0$

$f(x)\mp g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$; $|g(x)|\ge c'>0$



Subject:

العلاقة بين الدوال المستمرة مطلقاً ودوال محدودة التغير

مبرهنة: اذا كانت $f(x)$ مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ فتكون محدودة التغير على المجال

البرهان: عندما $f(x)$ مستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$ فانه من أجل أي عدد صغير $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث لكل $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\phi$ ، $V\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ ، $(i\neq j)$ ، $(i,j=1,2,\dots,n)$

و مجموع اطوال المجالات الجزئية المتحققة

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

ومحصورة نهائية اذا كان

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon=1$$

ومحصورة نهائية اذا كان $\varepsilon=1$

ولنأخذ التجزئة $T=\{a=x_0<x_1<\dots\}$ بحيث $x_k-x_{k-1}<\delta$

وبالتالي T_k

$[x_{k-1},x_k]$ للمجال $T_k \Rightarrow$ المجموع الموافق $V(f,T_k)<1$

وبهذا يكون التغير الكلي $\Leftarrow$ $\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(f)<1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m}\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\leq m$$

$\Leftarrow$ الدالة المعطاة محدودة التغير

نتيجة: من المبرهنة السابقة نجد أن مجموعة الدوال المستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$ هي مجموعة جزئية من مجموعة الدوال المحدودة التغير على ذلك المجال.

P.S: كل دالة مستمرة مطلقاً على المجال $[a,b]$ فتكون مستمرة على $[a,b]$ ولكن غير صحيح بالضرورة

مثال: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ;0<x\leq 1 \\ 0 & ;x=0 \end{cases}$$

نلاحظ أن هذه الدالة عبارة عن دالة مستمرة ولكن غير مستمرة مطلقاً على المجال $[0,1]$.

لأنه لو فرضنا جدلاً أنها مستمرة مطلقة على $[0,1]$ $\Leftarrow$ هي محدودة التغير على $[0,1]$ وهذا غير صحيح $\Leftarrow$ مستمرة.